

# Simplification construction et exploitation de plans de mélanges

Auteur :

Philippe ALEXIS – Ingénieur conseil indépendant

165 route de Genève – 69140 Rillieux la Pape – 06-07-04-59-94

[alexis.philippe@wanadoo.fr](mailto:alexis.philippe@wanadoo.fr)

Les propriétés d'un mélange dépendent de sa composition (par exemple pour 1 peinture : viscosité, temps de séchage, ...)

Le but d'un plan de mélanges est de traduire fidèlement les variations de chaque propriété  $Y_i$  par une relation  $Y_i = f(x_k)$  en fonction des  $x_k$  (proportions des  $k$  composants).

## Objectifs

- Simplifier la construction du plan de mélange (sans logiciel spécifique),
- Simplifier le dépouillement par l'utilisation de matrices orthogonales,
- Mesurer et minimiser la dispersion des propriétés d'un mélange.

## Construction du plan de mélanges

### Étape 1

Les ingénieurs et techniciens ont déterminé dans un premier temps les valeurs minimales ( $L_i$ ) et maximales ( $L_s$ ) souhaitables de concentration pour chaque composant.

Chaque composant correspond à 1 facteur de la matrice. Se limiter à 8 composants au maximum.

➔ Vérifier la compatibilité des limites de plage de concentration de chaque composant (démarche classique), car en plus des conditions initiales :  $L_i \leq x_i \leq L_s_i$  il est nécessaire de vérifier que :

$$\sum L_i = L < 1 \rightarrow d_i \leq 1 - L \rightarrow \text{correction } L_s_i$$

et  $\sum L_s_i = U > 1 \rightarrow d_i \leq U - 1 \rightarrow \text{correction } L_i$

➔ Obtention des limites initiales de concentration pour chaque composant.

### Étape 2

Choisir un modèle mathématique de représentation pour chaque propriété :

- Il faut prendre un modèle du 1<sup>er</sup> degré quand on ne soupçonne aucune interaction de l'effet de la concentration de chaque composant sur chacun des autres composants (rare).
- Il faut prendre un modèle du 2<sup>ème</sup> degré quand :
  - on soupçonne la présence d'interactions de tout ou partie des composants sur chacun des autres composants,
  - la validité d'un modèle du 1<sup>er</sup> degré n'est pas établie.

L'utilisation de modèles du 3<sup>ème</sup> degré est illusoire (interaction de niveau 2) car les interactions sont souvent plus faibles que la précision de mesure des caractéristiques du produit.

$k$  = nombre de composants     $C$  = nombre de coefficients ( $a_i$ ) du modèle mathématique

**Modèle du 1er degré :**     $Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k \rightarrow C = k$

**Modèle du 2ème degré :**     $Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + \sum(i > j) a_{ij} x_i x_j \rightarrow C = k + k(k-1) / 2$

### Étape 3

Choisir une matrice ayant un nombre d'essais  $\geq$  nombre de coefficients à déterminer :

Pour un modèle quadratique (2<sup>ème</sup> degré) :

Nb de coef	Matrice	n facteurs à p niveaux
6	L8 - 8 essais ou L9 - 9 essais	1 à 4 + 2 à 2 ou 3 à 3
10	L16 - 16 essais	4 à 4
15	L16 - 16 essais	5 à 4
21	L25 - 25 essais	6 à 5
28	L32 - 32 essais	7 à 4
36	L36 - 36 essais	8 à 3

Les matrices orthogonales proposées ont été sélectionnées : l'ordre des composants et l'affectation des concentrations et à chacun des niveaux a été optimisée pour minimiser les contraintes sur la concentration résultante du dernier composant.

→ Le nombre d'essais supplémentaires par rapport au strict nécessaire est faible (de 0 à 6)

#### Étape 4

Construire la matrice à l'aide des facteurs :

- Ranger les composants en ordre décroissant de plage de concentration (composant A, composant B, ...),
- Le composant A ne fera pas partie de la matrice,
- Bâtir le plan avec tous les autres composants (en utilisant les matrices proposées)
  - les composants varient sur 2 à 5 niveaux selon le choix de la matrice,
- Calculer pour chaque essai la concentration résultante de A.

#### Avantages :

Les essais définis par la matrice :

- ne sont pas uniquement des sommets, des centres d'arêtes ou de faces c'est-à-dire sur la périphérie du domaine (démarche classique),
- explorent aussi l'intérieur du domaine.

Si une matrice orthogonale facilite le dépouillement, elle impose en contre partie une combinatoire de niveaux fixes pour chacun des composants.

Les combinaisons imposées pour chacun des essais peuvent faire en sorte que la concentration résultante pour le composant A pour chacun des essais soit :

- inférieure à son niveau mini → correction à réaliser,
- supérieure à son niveau maxi → correction à réaliser,
- comprise entre ses niveaux mini et maxi → pas de correction.

Essai N°	Facteurs contrôlés				Concentration résultante	A corriger
	B	C	D	E		
1	1	1	1	1	0,000	-0,200
2	1	2	2	2	-0,050	-0,250
3	1	3	3	3	-0,100	-0,300
4	1	4	4	4	-0,150	-0,350
5	2	1	2	3	-0,117	-0,317
6	2	2	1	4	0,033	-0,167
7	2	3	4	1	0,050	-0,150
8	2	4	3	2	0,200	
9	3	1	3	4	-0,167	-0,367
10	3	2	4	3	-0,083	-0,283
11	3	3	1	2	0,400	
12	3	4	2	1	0,483	
13	4	1	4	2	-0,017	-0,217
14	4	2	3	1	0,267	
15	4	3	2	4	0,283	
16	4	4	1	3	0,567	0,017

  

Niveaux initiaux des composants				
	Niv 1	Niv 2	Niv 3	Niv 4
A	0,200	0,550		
B	0,450	0,333	0,217	0,100
C	0,450	0,333	0,217	0,100
D	0,050	0,150	0,250	0,350
E	0,050	0,117	0,183	0,250

## Étape 5

Réduire les plages possibles des concentrations des n-1 composants pour que la concentration résultante du composant A soit comprise entre ses niveaux mini et maxi pour chaque essai.

### Principe de rectification des niveaux maxi :

- Prendre la correction < 0 résultante du composant A la plus forte,
- Répartir cette correction sur les composants qui ne sont pas à leur niveau mini,
- Répartir cette correction proportionnellement à leur valeur de plage de concentration,
- Appliquer les corrections sur le niveau maxi de chaque composant concerné.

Une fois la 1<sup>ère</sup> correction faite on regarde s'il y a encore des corrections < 0 à faire : il sera peut-être nécessaire de réitérer ce processus pour respecter le niveau mini de concentration du composant A.

### Principe de rectification des niveaux mini :

- Prendre la correction > 0 résultante du composant A la plus forte,
- Répartir cette correction sur les composants qui ne sont pas à leur niveau maxi,
- Répartir cette correction proportionnellement à leur valeur de plage de concentration,
- Appliquer les corrections sur le niveau mini de chaque composant concerné.

Une fois la 1<sup>ère</sup> correction faite on regarde s'il y a encore des corrections > 0 à faire : il sera peut-être nécessaire de réitérer ce processus pour respecter le niveau maxi de concentration du composant A.

Voir exemple ci-dessous une fois les rectifications faites :

Essai N°	Facteurs contrôlés				Concentration résultante A
	B	C	D	E	
1	1	1	1	1	0,278
2	1	2	2	2	0,253
3	1	3	3	3	0,229
4	1	4	4	4	0,204
5	2	1	2	3	0,223
6	2	2	1	4	0,295
7	2	3	4	1	0,299
8	2	4	3	2	0,371
9	3	1	3	4	0,200
10	3	2	4	3	0,238
11	3	3	1	2	0,469
12	3	4	2	1	0,507
13	4	1	4	2	0,271
14	4	2	3	1	0,405
15	4	3	2	4	0,415
16	4	4	1	3	0,549

  

Essai N°	Facteurs contrôlés				Inf	Sup
	B	C	D	E		
1	0,326	0,265	0,081	0,050		
2	0,326	0,210	0,129	0,081		
3	0,326	0,155	0,178	0,113		
4	0,326	0,100	0,226	0,144		
5	0,270	0,265	0,129	0,113		
6	0,270	0,210	0,081	0,144		
7	0,270	0,155	0,226	0,050		
8	0,270	0,100	0,178	0,081		
9	0,213	0,265	0,178	0,144		
10	0,213	0,210	0,226	0,113		
11	0,213	0,155	0,081	0,081		
12	0,213	0,100	0,129	0,050		
13	0,157	0,265	0,226	0,081		
14	0,157	0,210	0,178	0,050		
15	0,157	0,155	0,129	0,144		
16	0,157	0,100	0,081	0,113		

  

	Niv 1	Niv 2	Niv 3	Niv 4	Inf	Sup
A	0,200	0,550				
B	0,326	0,270	0,213	0,157	0,057	-0,124
C	0,265	0,210	0,155	0,100		-0,185
D	0,081	0,129	0,178	0,226	0,031	-0,12
E	0,050	0,081	0,113	0,144		-0,106

Corrections effectuées sur tous les niveaux  
Valeurs résultantes des niveaux des composants

## Bilan de la construction du plan de mélange

A l'aide d'1 feuille de calcul Excel spécialement conçue la détermination des niveaux mini et maxi pour chaque composant est très rapide (< 1 minute).

Le domaine résultant est inscrit dans le domaine initial :

- les plages de concentration de chaque composant sont inférieures aux plages initiales,
- les valeurs fixes de chacun des niveaux satisfont au critère d'orthogonalité imposé pour la matrice.

**Avantage** : Pas de tri des points candidats pour définir les essais avec des algorithmes mathématiques complexes.

**Inconvénient** : Réduction de la plage de concentration pour chaque composant.

## **Exploitation du plan de mélanges**

### ***1ère façon (classique) :***

- Résoudre le système de P équations (les P essais du plan) à C inconnues (C coefficients du modèle avec  $P \geq C$ ),
- En déduire le polynôme de modélisation pour la propriété définie à optimiser,
- Calculer (maximum ou valeur cible) et en déduire la combinaison ou le domaine de combinaisons de concentration pour tous les composants.

### ***2ème façon (proposée) :***

- Déterminer l'effet de la concentration pour chaque niveau de chaque composant,
- Rechercher la combinaison des niveaux de concentration des composants optimisant conjointement les propriétés du mélange (principe d'additivité des effets des composants),
- Il est toujours possible de résoudre le système de P équations (les P essais du plan) à C inconnues (C coefficients du modèle avec  $P \geq C$ ).

## **Validation du modèle**

Réaliser physiquement le mélange avec la combinaison théoriquement optimisée des niveaux des concentrations des composants.

Vérifier les concordances entre les prévisions données par chacun des modèles pour chacune des propriétés et les valeurs réelles des propriétés mesurées.

Si cette concordance n'existe pas le modèle n'est pas validé

➔ Passage d'un modèle du 1<sup>er</sup> degré à un modèle du 2<sup>ème</sup> degré.

## **Autres intérêts des matrices orthogonales**

### ***Influence du processus de réalisation du mélange :***

Les matrices proposées ont toujours une ou plusieurs colonnes disponibles par rapport au nombre de composants testés.

Il est intéressant de les utiliser pour tester l'influence des paramètres de processus de réalisation du mélange (par exemple : ordre d'introduction, temps de mélangeage, température, ...) sur les propriétés du mélange, sans augmenter le nombre d'essais.

## **Optimisation de la stabilité des propriétés d'un mélange**

Tous les procédés industriels sont soumis aux variations non maîtrisables de leur environnement (dont l'irrégularité des caractéristiques des matières approvisionnées).

Pour minimiser leur répercussion sur les propriétés du mélange, il faut :

- Mesurer les propriétés sur une série d'échantillons d'utilisation du mélange (moyenne et écart type),
- Rechercher la combinaison de l'ensemble des paramètres testés (composants et paramètres processus) permettant de minimiser la dispersion des propriétés selon l'approche Taguchi.

## **Conclusions**

On peut maîtriser et visualiser la construction d'un plan de mélanges avec une simple feuille Excel à l'aide de matrices orthogonales (fournies) dont le dépouillement est simple.

Ces plans explorent l'intérieur du domaine et permettent l'adjonction de paramètres processus sans ajout d'essais.

Ces plans permettent de traiter la variabilité observée des propriétés d'un mélange pourtant réalisé dans des conditions identiques.

Le classeur Excel proposé de construction – dépouillement est mis à disposition pour toute demande.